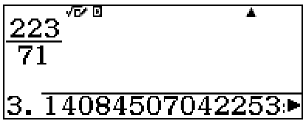
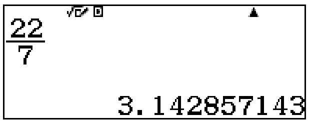
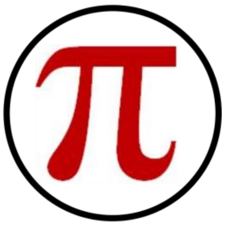
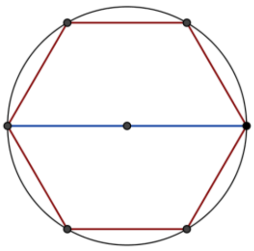
Un recorrido por la historia de π con Geogebra y una calculadora científica.

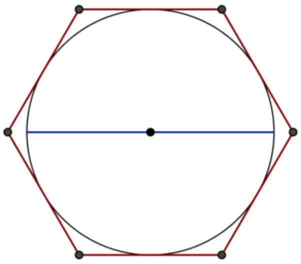


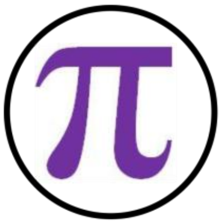
$< \pi <$

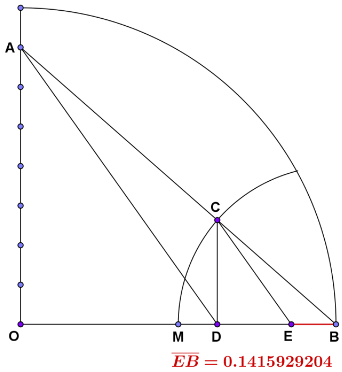


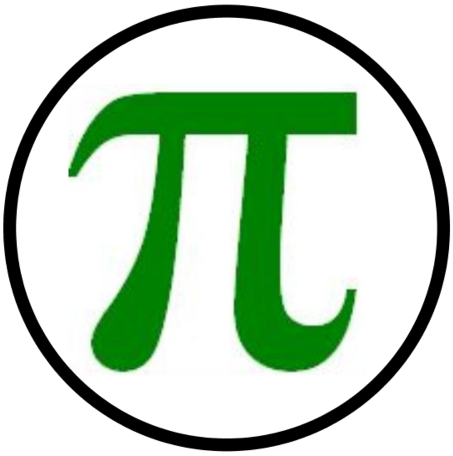


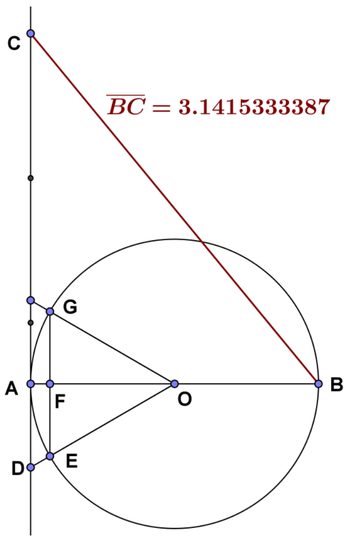






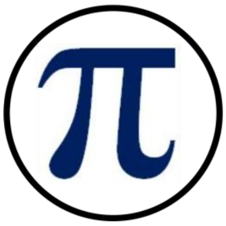




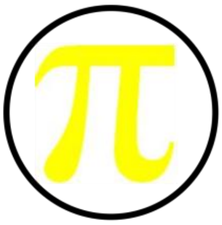


ValorNumérico[355/113, 10]

→ 3.14159292



$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \qquad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2}$$



ValorNumérico[10^10*sen(180° /10^10),21]

→ 3.14159265358979323840

$< \pi <$

ValorNumérico[10^10*tg(180°/10^10),21]

→ 3.14159265358979323856

1 ValorNumérico[π , 101]

→ 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170680

Luis Barrios Calmaestra

Índice.

1. Introducción.

Este recurso didáctico permite realizar un recorrido por la evolución del número π a lo largo de la historia con instrumentos de cálculo y representación gráfica al alcance de los alumnos: el programa Geogebra y la calculadora Classwiz fx-570SP X Iberia. Además se propone una actividad con una miscelánea del Proyecto Descartes. Y para finalizar, siempre viene bien ejercitar el cálculo mental, en este caso, utilizando el número π.

El alumno puede comprobar con estas herramientas las distintas aproximaciones, aritméticas y geométricas, que han formado parte de la historia del número π, y que los matemáticos que han trabajado en ellas, las han descubierto sin disponer de estos instrumentos de cálculo.

Con Geogebra, se propone realizar todas las construcciones geométricas, para comprobar el método de Arquímedes y los intentos de aproximaciones geométricas a π. En estas aproximaciones se pueden realizar mediciones y compararlas con las obtenidas analíticamente. También se propone utilizar la Vista de Cálculo Simbólico para obtener cálculos con el número de decimales necesario en cada momento y para realizar sumas infinitas. Estas actividades van precedidas de .

Con la calculadora se proponen actividades de cálculo de fracciones y expresiones con radicales obtenidas en las distintas aproximaciones. También se puede aproximar el valor de sumas y productos infinitos realizando sumas y producto con cada vez más términos. Estas actividades van precedidas de **C**.

Con el proyecto Descartes se propone una actividad interactiva en la que se puede comprender el método de Arquímedes. Modificando el número de lados de los polígonos se puede ver como el perímetro se aproxima a la longitud de la circunferencia y como el cociente entre el perímetro y el diámetro de la circunferencia se aproxima a π. También se puede comprobar que esta relación no depende del radio de la circunferencia. Aunque solo hay una actividad, está precedida de .

A continuación se proponen actividades de cálculo mental con la longitud de la circunferencia, el área del círculo y el número π. La tecnología es muy útil, pero no hay que descuidar el cálculo mental y hay que ejercitarlo siempre que sea posible.

Por último y ahora de forma solamente expositiva, se dan unos datos biográficos de los personajes matemáticos y su contribución a la evolución del número π.

Además de los símbolos indicativos de la herramienta a utilizar, en el documento aparecen los siguientes símbolos con su significado:

π Antes de aparecer el símbolo π.

π Momento en que aparece el símbolo π.

π Después de aparecer el símbolo π.

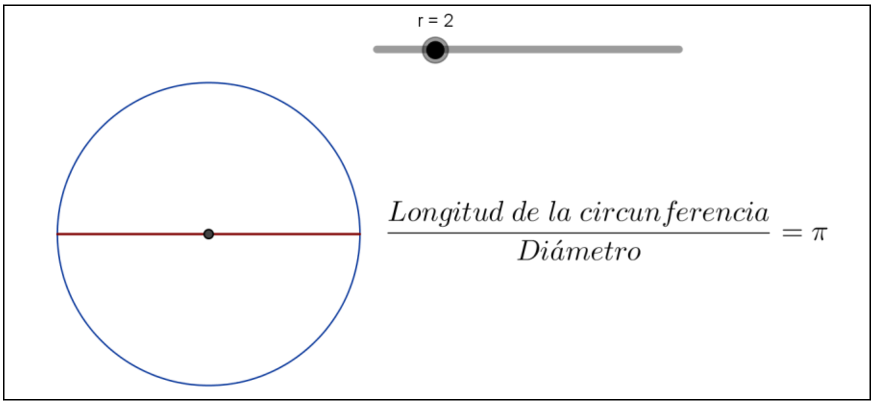
π π es un número irracional.

π π es un número trascendente.

2. El número π.

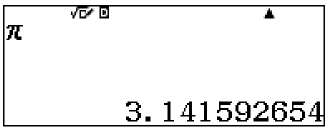
Al dividir la longitud de cualquier circunferencia entre su diámetro se obtiene siempre el mismo número, que se representa por π. Es un número irracional, es decir, tiene infinitas cifras decimales no periódicas y no puede ser expresado en forma de fracción. Y es un número trascendente, no se puede construir con regla y compás un segmento con su longitud.

Abre Geogebra y crea un deslizador, ponle como nombre r y haz que tome valores positivos. Construye una circunferencia con centro cualquier punto y radio r. Dibuja un diámetro. Define un texto en el que aparezca el cociente entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Modifica el radio de la circunferencia y comprueba que el cociente es siempre igual.



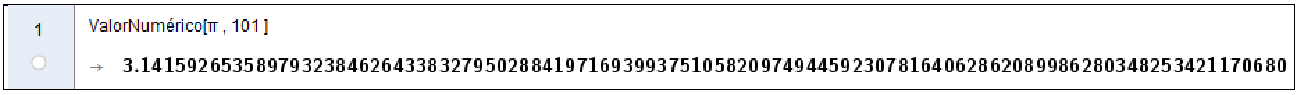
Cuando nos aparece en el colegio por primera vez el número π le damos el valor 3.14 ó 3.1416. Cuando empezamos a utilizar la calculadora científica, podemos obtener directamente el valor de π con más exactitud, pulsando la tecla correspondiente.

C *Busca el número π en tu calculadora y calcula el valor que tiene.*



Aprendemos que π tiene infinitas cifras decimales pero la calculadora solamente puede mostrar unas pocas. Utilizando el ordenador y algún programa de software matemático podemos calcular bastantes más. Por ejemplo:

Abre la Vista CAS en Geogebra y escribe "ValorNumérico[π,n]", sustituyendo n por el número de cifras significativas que se quieren mostrar. Por ejemplo: 101.



Se obtienen las cien primeras cifras decimales de π redondeando la última:

π=3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798 . . .

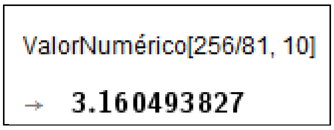
3. Historia del número π con Geogebra y calculadora.

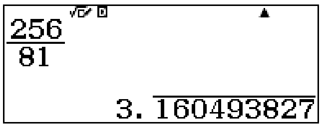
En Secundaria y Bachillerato se utiliza el "número pi" con el símbolo π, se estudia como un número irracional y como un número que no se puede representar de forma exacta en la recta real. Pero llegar hasta el conocimiento actual de este número ha supuesto mucho tiempo de estudio e investigación a lo largo de la historia.

A continuación se exponen algunos detalles sobre su evolución, desde el siglo XIX a. C. con una primera referencia de una aproximación, hasta el siglo XXI con el cálculo de diez billones de cifras decimales, pasando por la adopción del símbolo con el que lo conocemos.

En el **Papiro de Rhind**, siglo XVI a. C., copia de un documento del siglo XIX a.C., se dan instrucciones para calcular el área de un círculo "*Corta 1/9 del diámetro y construye un cuadrado sobre la longitud restante. Este cuadrado tiene igual área que el circulo*". Se puede deducir que el valor de π es 256/81, aproximadamente 3.16.

C *Calcula el valor de esta aproximación con Geogebra y con la calculadora.*





En **Babilonia**, aproximadamente en 1600 a. C., medían la circunferencia de un círculo como tres veces el diámetro y el área como un doceavo del cuadrado de la circunferencia, lo cual es correcto para una estimación de π a 3. En la **Tablilla de Susa**, en Mesopotamia, los babilonios utilizaban:

$$3 + \frac{1}{8} = 3.125$$

En la **Biblia,** (libro primero de los Reyes, capítulo 7, versículo 23 y en el libro segundo de las Crónicas, capítulo 4, versículo 2), se puede leer la descripción de un depósito de agua para el palacio del Rey Salomón: "*Hizo fundir asimismo un mar de diez codos de un lado al otro, perfectamente redondo. Tenía cinco codos de altura y a su alrededor un cordón de treinta codos*". De aquí se deduce que se da a π el valor 3.

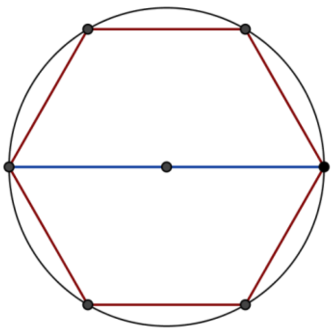
Euclides en su obra Elementos, 300 a. C., habla de la proporcionalidad del área del círculo y el diámetro. En la proposición II del libro XII, enuncia: "*Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros*". Aunque no da ninguna constante.

El matemático griego **Arquímedes**, siglo III a. C., fue el primero en idear un procedimiento matemático para calcular el valor de π, obteniendo que estaba comprendido entre 3+10/71=223/71 y 3+1/7=22/7. El método usado por Arquímedes consistía en circunscribir e inscribir polígonos regulares de n lados en circunferencias y calcular el perímetro de dichos polígonos. Empezó con hexágonos circunscritos e inscritos, y fue doblando el número de lados hasta llegar a polígonos de 96 lados.

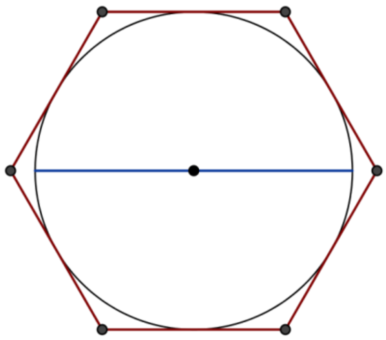
C *Calcula el valor de estas aproximaciones con Geogebra y con la calculadora y comprueba que π está comprendido entre ellos.*

ValorNumérico[223/71, 10]	$\frac{223}{71}$	ValorNumérico[22/7,10]	$\frac{22}{7}$
→ 3.14084507	3.14084507	→ 3.142857143	3.142857143

Dibuja con Geogebra dos circunferencias con el mismo radio. En una construye un hexágono inscrito y en otra circunscrito. Calcula el cociente entre el perímetro de los hexágonos y el diámetro de la circunferencia.

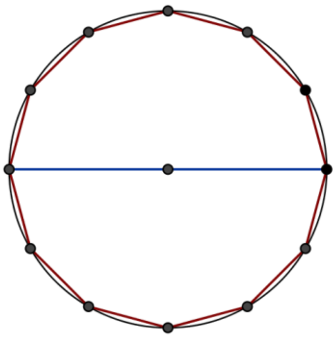


$$\frac{Perímetro}{Diámetro} = 3$$

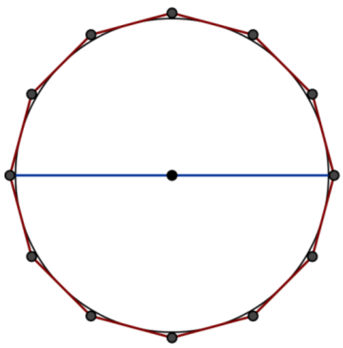


$$\frac{Perímetro}{Diámetro} = 3.4641$$

Vuelve a dibujar otras dos circunferencias con el mismo radio. En una construye un dodecágono inscrito y en otra circunscrito. Calcula el cociente entre el perímetro de los dodecágonos y el diámetro de la circunferencia.



$$\frac{Perímetro}{Diámetro} = 3.1058$$



$$\frac{Perímetro}{Diámetro} = 3.2154$$

Intenta hacer lo mismo con polígonos de 24, 48 y 96 lados. Calcula el cociente entre el perímetro de los polígonos y el diámetro de la circunferencia.

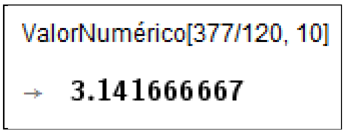
n=24	$\frac{Perímetro}{Diámetro} = 3.1326$	$\frac{Perímetro}{Diámetro} = 3.1597$
n=48	$\frac{Perímetro}{Diámetro} = 3.1394$	$\frac{Perímetro}{Diámetro} = 3.1461$
n=96	$\frac{Perímetro}{Diámetro} = 3.1410319509$	$\frac{Perímetro}{Diámetro} = 3.1427145996$

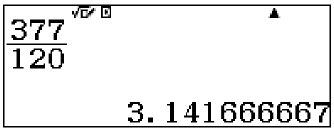
El método de Arquímedes fue utilizado por matemáticos posteriores, aumentando el número de lados de los polígonos, para obtener mejores aproximaciones.

Ptolomeo, en el siglo II, utiliza polígonos de hasta 720 lados y obtiene la aproximación:

$$3+\frac{8}{60}+\frac{30}{3600}=\frac{377}{120}=3.14166$$

C *Calcula el valor de esta aproximación con Geogebra y con la calculadora.*

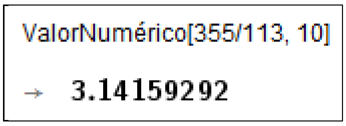


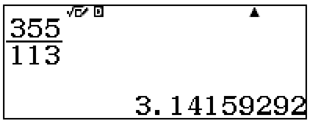


En China, **Liu Hui** en el siglo III, utilizó polígonos de hasta 3072 lados para obtener el valor 3.14159.

Sobre el año 500 d.C., el chino **Zu Chongzhi** utilizó $\frac{355}{113}$, que fue la aproximación más precisa durante los 900 años posteriores.

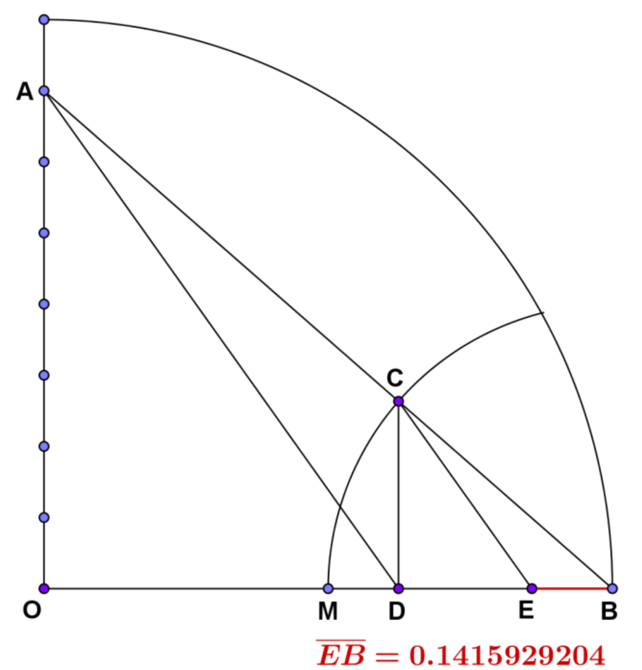
C *Calcula el valor de esta aproximación con Geogebra y con la calculadora.*





Zu Chongzhi realizó la siguiente construcción gráfica.

Realiza la construcción con Geogebra.



- *Dibuja un cuadrante de una circunferencia de radio una unidad.*
- *Representa el punto A a una distancia de 7/8 del origen O.*
- *Representa el punto medio M del segmento OB.*
- *Traza un arco de circunferencia con centro en B y radio BM, es decir de radio 1/2.*
- *Traza ahora el segmento AB que corta al arco anterior en el punto C.*
- *Por el punto C traza una paralela al segmento OA, que corta a OB en D.*
- *Por el punto C traza otra paralela al segmento AD, que corta al segmento OB en E.*
- *Calcula la longitud del segmento EB.*
- *Suma tres a esta longitud.*

Demostración.

Se verifica que: $\overline{OB} = 1$, $\overline{OA} = \frac{7}{8}$, $\overline{CB} = \frac{1}{2}$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{49}{64}} = \sqrt{\frac{113}{64}} = \frac{\sqrt{113}}{8}$$

Los triángulos AOB y CDB son semejantes, por tanto:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{DB} = \frac{\overline{OB} \cdot \overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{1/2}{\sqrt{113}/8} = \frac{4}{\sqrt{113}}$$

También los triángulos ADB y CEB son semejantes, por tanto:

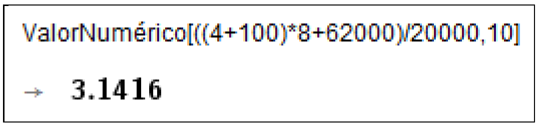
$$\frac{\overline{EB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{EB} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{113}}}{\frac{\sqrt{113}}{8}} = \frac{16}{113} = 0.14159292$$

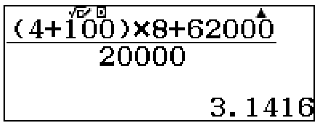
Si se añade este segmento a un segmento de longitud tres, tendríamos un segmento de longitud π:

$$\pi = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113} = 3.14159292$$

En la India, **Aryabhata**, entre los siglos V y VI, utilizaba 3.1416. En su obra escribe: "*Añada cuatro a cien, multiplíquelo por ocho y entonces añada 62000. Mediante esta regla la circunferencia de un círculo con un diámetro de 20000 puede ser aproximado*".

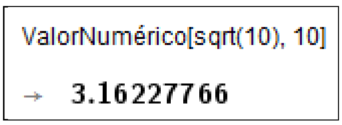
C *Calcula el valor de esta aproximación con Geogebra y con la calculadora.*

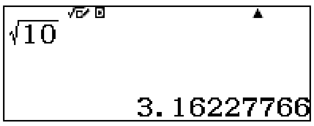




Brahmagupta, en el siglo VI utiliza $\sqrt{10} = 3.16$

C *Calcula el valor de esta aproximación con Geogebra y con la calculadora.*





El matemático árabe **Al Jwarizmi**, en el siglo IX, indica en su obra "Álgebra", que el hombre práctico usa como valor de π, 22/7, el geómetra utiliza 3 y el astrónomo 3.1416.

Madhava, en el año 1400 utiliza el desarrollo en serie de la arcotangente y suma 21 términos de la serie para calcular 11 cifras decimales. Esta serie la redescubriría doscientos años después Gregory.

En 1429, **Al-Khasi** obtiene 16 decimales utilizando el método de Arquímedes con polígonos de un elevado número de lados.

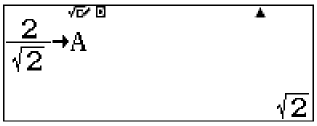
A partir del siglo XII, con la introducción de las cifras arábigas empezaron a obtenerse mejores aproximaciones para π. Más tarde la Trigonometría y el Cálculo Infinitesimal permitieron mejorar las aproximaciones.

El matemático francés **Viète**, en el siglo XVI, obtiene el valor de π con nueve cifras decimales a partir del siguiente producto infinito convergente:

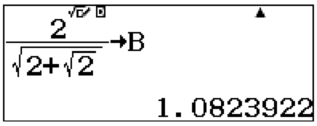
$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ldots .$$

C *Utiliza la calculadora para calcular el producto de todos los factores que sea posible. Puedes introducir un factor en cada una de las memorias posibles.*

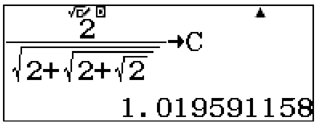
A



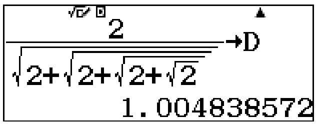
B



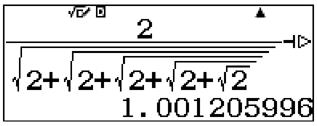
C



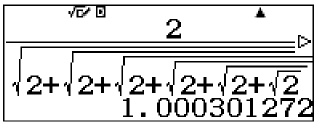
D



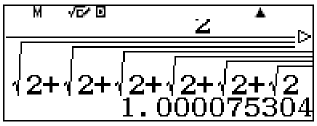
E



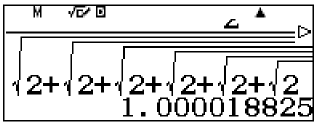
F



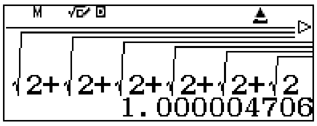
M



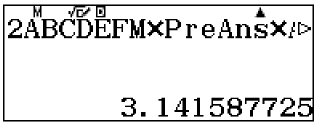
PreAns



Ans



El valor que se obtiene multiplicando todas las memorias es:



El matemático alemán **Ludolf Van Ceulen** hizo una primera aproximación con 20 cifras decimales y después llegó a calcular 35 cifras decimales de π, utilizando el método de Arquímedes y un polígono de 2^{62} lados.

John Wallis obtiene en 1665, a partir de otro producto infinito, las 100 primeras cifras decimales:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\times2}{1\times3} \times \frac{4\times4}{3\times5} \times \frac{6\times6}{5\times7} \times \frac{8\times8}{7\times9} \times \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

C *Utiliza la calculadora para calcular productos con un mayor número de factores y comprobar la aproximación de la fórmula.*

$$\prod_{x=1}^{1000}\left(\frac{4x^2}{4x^2-1}\right) = 1.570403873 \qquad 2\times Ans = 3.140807746$$

$$\prod_{x=1}^{10000}\left(\frac{4x^2}{4x^2-1}\right) = 1.570757059 \qquad 2\times Ans = 3.141514118$$

$$\prod_{x=1}^{100000}\left(\frac{4x^2}{4x^2-1}\right) = 1.570792399 \qquad 2\times Ans = 3.141584797$$

$$\prod_{x=1}^{1000000}\left(\frac{4x^2}{4x^2-1}\right) = 1.570795921 \qquad 2\times Ans = 3.141591842$$

π **Gottfried Wilhem von Leibniz**, en 1674, obtiene a partir del desarrollo en serie de arctg x, del inglés **Gregory**, para x=1:

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

C *Utiliza la calculadora para calcular sumas con un mayor número de sumandos y comprobar la aproximación de la fórmula.*

$$4\times\sum_{x=0}^{10}\left(\frac{(-1)^x}{2x+1}\right) = 3.232315809 \qquad 4\times\sum_{x=0}^{100}\left(\frac{(-1)^x}{2x+1}\right) = 3.151493401 \qquad 4\times\sum_{x=0}^{1000}\left(\frac{(-1)^x}{2x+1}\right) = 3.142591654$$

$$4\times\sum_{x=0}^{10000}\left(\frac{(-1)^x}{2x+1}\right) = 3.141692644 \qquad 4\times\sum_{x=0}^{100000}\left(\frac{(-1)^x}{2x+1}\right) = 3.141602653 \qquad 4\times\sum_{x=0}^{1000000}\left(\frac{(-1)^x}{2x+1}\right) = 3.141593652$$

Calcula el valor de la suma con Geogebra.

Suma[(-1)^n/(2n+1), n, 0, ∞]

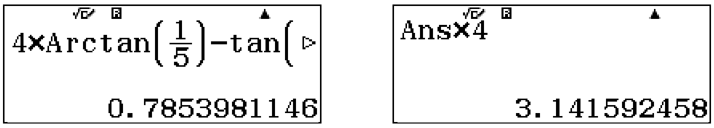
$\rightarrow \frac{1}{4}\pi$

El símbolo π lo utilizó por primera vez **William Oughtred** (1574-1660) como inicial de "peripheria" (perímetro), utilizando la letra correspondiente del alfabeto griego. Posteriormente lo propuso para su utilización **William Jones** en 1706. Pero fue el matemático suizo **Leonhard Euler**, en 1737, al utilizarlo en su libro "Introductio in Analysin Infinitorum" el que extendió su uso.

John Machin, encuentra un nuevo método para calcular aproximaciones de π, utilizando también el desarrollo en serie de la arcotangente. En 1706, consiguió 100 decimales calculados a mano con la fórmula:

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{239}$$

Calcula el valor de esta aproximación con la calculadora.

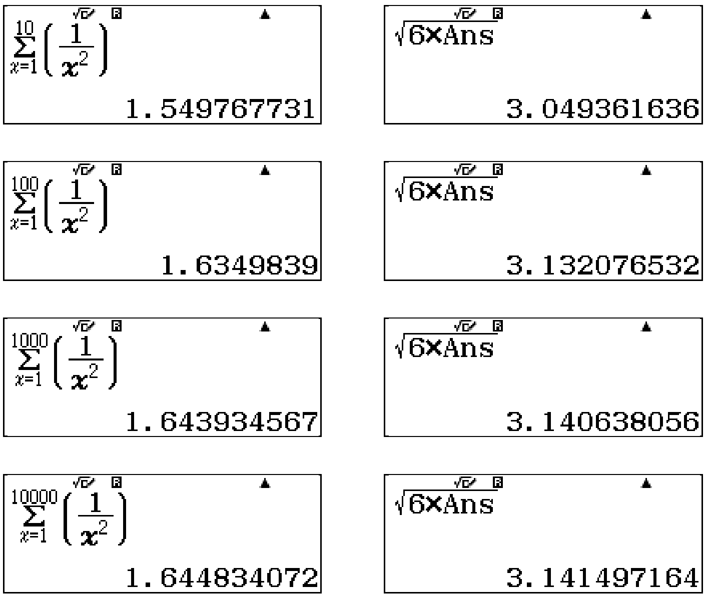


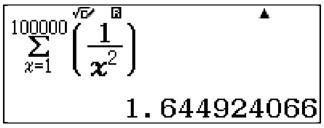
El matemático alemán **Johan Heinrich Lambert**, en 1766, demostró que π es un número irracional, es decir, que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Hoy en día es fácil calcular el número π con una gran cantidad de cifras decimales utilizando un ordenador.

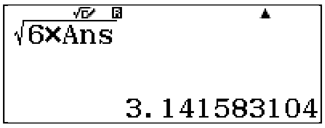
Euler, en 1734, consiguió calcular la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales, obteniendo:

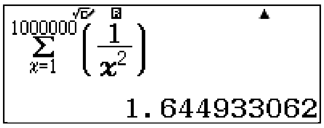
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

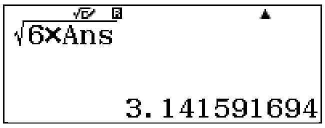
Utiliza la calculadora para calcular sumas con un mayor número de sumandos y comprobar la aproximación de la fórmula.



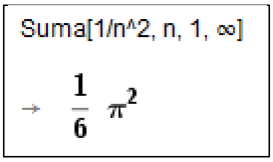








Calcula el valor de la suma con Geogebra.

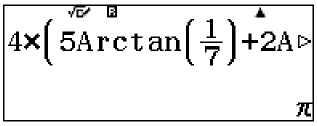


C *Observa las sumas realizadas con la serie de Leibniz y la serie de Euler. ¿Cuál se aproxima más rápidamente a π?*

Euler, en 1764, calculó en una hora veinte cifras decimales del número π con la fórmula:

$$\frac{\pi}{4} = 5\cdot \text{arctg}\frac{1}{7} + 2\cdot \text{arctg}\frac{3}{79}$$

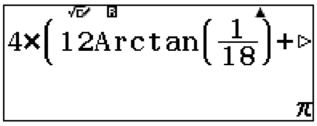
C *Calcula el valor de esta aproximación con la calculadora.*



Karl Friedrich Gauss también descubrió algunas fórmulas del mismo tipo. Una de las más utilizadas ha sido:

$$\frac{\pi}{4} = 12\cdot \text{arctg}\frac{1}{18} + 8\cdot \text{arctg}\frac{1}{57} - 5\cdot \text{arctg}\frac{1}{239}$$

C *Calcula el valor de esta aproximación con la calculadora.*



El matemático inglés **William Shanks**, dedicó veinte años al cálculo de cifras decimales de π y obtuvo en 1853, 707 decimales, con la fórmula de Machin. Sin embargo, cometió un error en el decimal que ocupaba el lugar 528º y a partir de él, todos los demás estaban mal calculados.

Ferdinand Lindemann, en 1882 demostró que π es un número trascendente, es decir, no se puede construir con regla y compás.

La informática y la utilización de ordenadores cada vez más potentes y rápidos, han hecho posible el cálculo de cada vez más cifras decimales del número π y en menos tiempo. Para ello se han utilizado, en primer lugar fórmulas del tipo arcotangente y posteriormente se han necesitado fórmulas más potentes.

Una de ellas fue la descubierta por el matemático indio **Ramanujan**, en 1914:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot (1103 + 26390n)}{(n!)^4 \cdot 396^{4n}}$$

Esta fórmula fue utilizada para obtener 17526200 decimales en 1985.

Y otra fórmula descubierta por los **hermanos Chudnosky**:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(6n)!}{(3n)! \times (n!)^3} \cdot \frac{13591409 + 545140134n}{(640320)^{3n+\frac{3}{2}}}$$

Fue usada por los hermanos Chudnovsky para calcular más de mil millones de dígitos. Se utilizó en el cálculo de 2.7 billones de dígitos en diciembre de 2009, 5 billones de dígitos en agosto de 2010, y 10 billones de dígitos en octubre de 2011.

Aunque se insista en la búsqueda de cada vez más cifras decimales, para los cálculos que podamos realizar, para cálculos astronómicos o para cálculos microscópicos, es suficiente con no más de 40 cifras decimales.

Calcula el valor de π con 40 cifres decimales utilizando Geogebra.

```
ValorNumérico[π ,41]
→ 3.1415926535897932384626433832795028841972
```

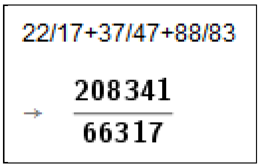
4. El número π es un número irracional.

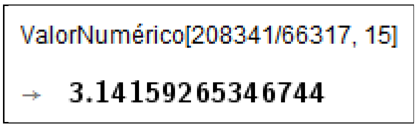
El matemático alemán **Johan Heinrich Lambert**, en 1766, demostró que π es un número irracional, es decir, que tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

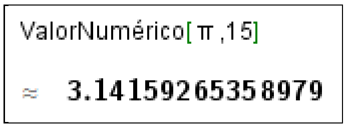
Aunque π es un número irracional, hay algunas aproximaciones racionales bastante aceptables como las siguientes.

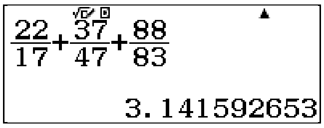
$$\frac{22}{7} \quad , \quad \frac{355}{113} \quad , \quad \frac{22}{17}+\frac{37}{47}+\frac{88}{83}=\frac{208341}{66317}$$

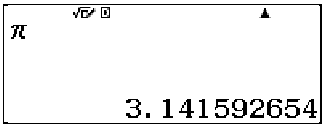
C *Las dos primeras ya se han visto antes. Calcula el valor de la tercera aproximación con Geogebra y con la calculadora y compárala con el valor real de π.*











Un número es racional si y sólo si puede expresarse como una fracción continua finita simple. Si un número real es irracional, su expresión en forma de fracción continua es infinita.

El número π se puede expresar como la siguiente fracción continua infinita.

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5+\cfrac{9}{7+\cfrac{16}{9+\cfrac{25}{11+\dots}}}}}}$$

C *Intenta buscar un procedimiento para aproximar el valor de esta fracción continua utilizando Geogebra y la calculadora.*

5. El número π es un número trascendente.

Ferdinand Lindemann, en 1882, demostró que π es un número trascendente. Esto significa que no se puede construir con regla y compás un segmento de longitud π. Otro significado equivalente es que no es posible obtener el valor de π como solución de una ecuación con coeficientes racionales.

Por ejemplo, $\sqrt{2}$ sí se puede construir con regla y compás. Si dibujamos un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 cm, entonces la hipotenusa es un segmento de longitud $\sqrt{2}$ cm. Se dice que $\sqrt{2}$ es un número algebraico. También es posible obtener $\sqrt{2}$ como solución de una ecuación con coeficientes racionales: $x^2 - 2 = 0$.

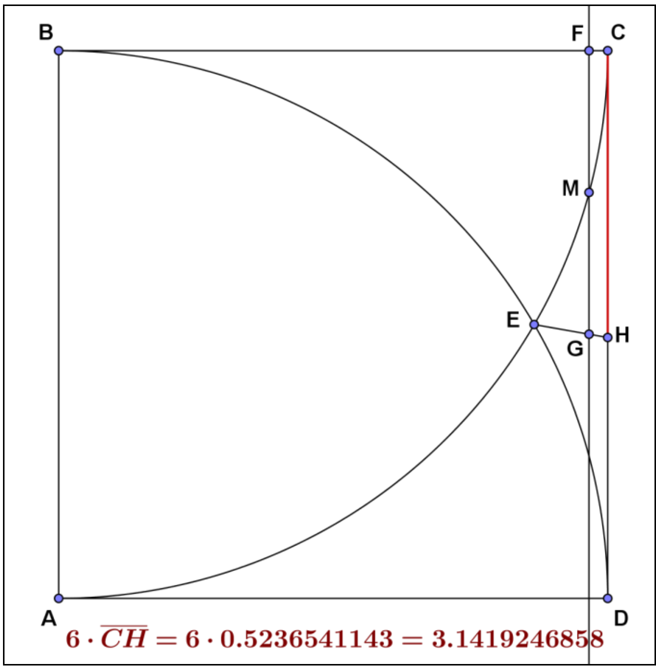
Si construimos una circunferencia de radio 1 cm. La longitud de la circunferencia es 2π cm. y la longitud de media circunferencia sería π cm. Pero es imposible trasladar ese arco de longitud π a una línea recta.

Si fuera posible la representación de π, el problema de la cuadratura del círculo también sería posible, es decir construir con regla y compás un cuadrado que tenga igual área que un círculo dado. A partir de π, sería posible representar $\sqrt{\pi}$ y tendríamos solucionado el problema de la cuadratura del círculo.

Ha habido en la historia algunos intentos de construcción de π gráficamente. Uno de ellos ya se ha expuesto antes, corresponde al matemático chino **Zu Chongzhi**, en el siglo V a.C.

Otro, que se expone a continuación, corresponde al filósofo inglés **Thomas Hobbes** en el siglo XVII.

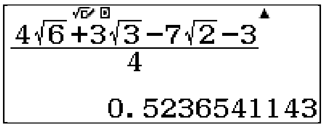
Realiza la construcción con Geogebra.

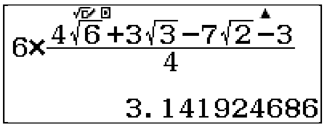


- *Dibuja un cuadrado de lado una unidad.*
- *Representa dos arcos de amplitud 90º con centros en A y B que se cortan en el punto E.*
- *Representa el punto medio M del arco EC.*
- *Traza una recta paralela por el punto M al segmento AB.*
- *Representa el punto de corte F de dicha recta con el BC.*
- *Representa el punto G, simétrico de F respecto de M.*
- *Une los puntos E y G y prologa el segmento hasta cortar a CD en el punto H.*
- *Calcula la longitud del segmento CH y multiplícala por 6.*

Se puede demostrar que: $\overline{CH} = \dfrac{4\sqrt{6}+3\sqrt{3}-7\sqrt{2}-3}{4}$

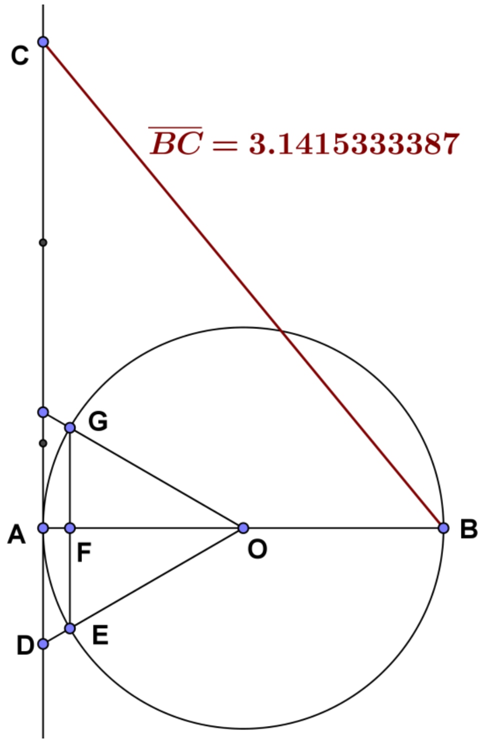
Calcula este valor con la calculadora y comprueba que se obtiene el mismo valor que con Geogebra.





El siguiente intento lo realizó el matemático polaco **Kochanski**.

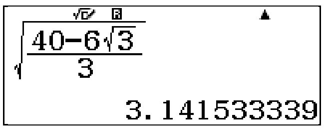
Realiza la construcción con Geogebra.



- *Dibuja una circunferencia de radio 1.*
- *Construye un triángulo equilátero, uno de cuyos vértices es el centro de la circunferencia y los otros están sobre la circunferencia, E y G.*
- *Traza el diámetro AB que contenga a la altura del triángulo.*
- *Traza una paralela por el punto A al lado EG del triángulo.*
- *Prolonga los otros dos lados OE y OG hasta cortar a la paralela anterior. Uno de los puntos es el punto D.*
- *Desde el punto D y sobre la recta, traslada tres veces el radio de la circunferencia, obteniendo el punto C.*
- *La longitud del segmento BC es aproximadamente la mitad de la longitud de la circunferencia. Como el radio de la circunferencia es 1, la longitud del segmento es aproximadamente π.*

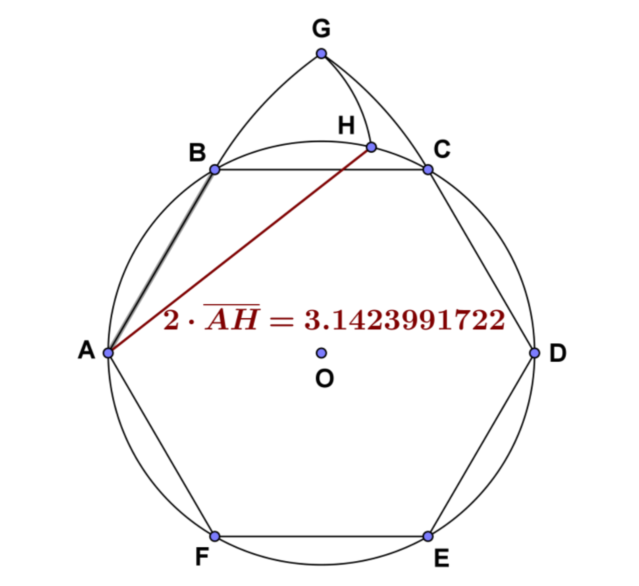
Se puede demostrar que: $\overline{BC} = \sqrt{\dfrac{40-6\sqrt{3}}{3}}$

Calcula este valor con la calculadora y comprueba que se obtiene el mismo valor que con Geogebra.



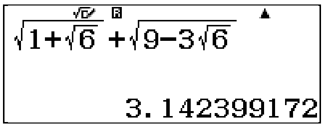
Y el siguiente lo realizó el matemático italiano **Mascheroni**.

Realiza la construcción con Geogebra.

	*- Dibuja una circunferencia de radio 1.* *- Representa un hexágono inscrito en ella.* *- Traza una circunferencia con centro en A y radio AC.* *- Traza otra circunferencia con centro en D y radio BD.* *- Representa el punto de corte G de las dos circunferencias.* *- Con centro en B y radio BG traza un arco de circunferencia hasta cortar a la circunferencia inicial en el punto H.* *- El segmento AH tiene una longitud aproximada a un cuarto de circunferencia. Un segmento de doble longitud tendrá una medida aproximada a π.*

Se puede demostrar que: $2 \cdot \overline{AH} = \sqrt{1+\sqrt{6}} + \sqrt{9-3\sqrt{6}}$

Calcula este valor con la calculadora y comprueba que se obtiene el mismo valor que con Geogebra.



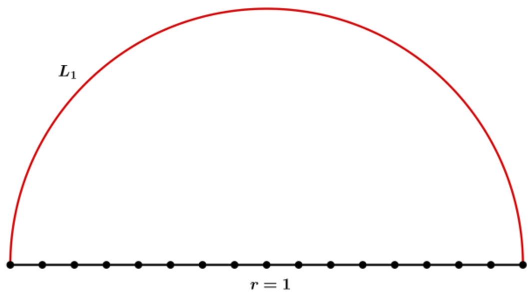
6. ¿ π = 2 ?

Y después del esfuerzo de todos las personas, a lo largo de la historia, que han trabajado en primer lugar en el descubrimiento de π y después en el cálculo de cada vez más cifras decimales hasta llegar a diez billones, a continuación se propone el siguiente razonamiento, que de ser cierto, haría inútil todo ese esfuerzo y trabajo.

Construye con Geogebra un segmento de longitud 2 y a partir de él, construye también las siguientes líneas y calcula sus longitudes:

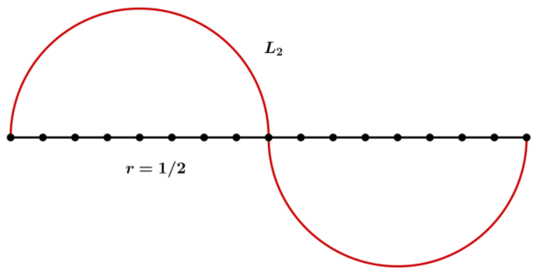
1. *Construye media circunferencia de radio 1. Calcula la longitud.*

$$L_1 = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2\pi \cdot 1}{2} = \pi$$



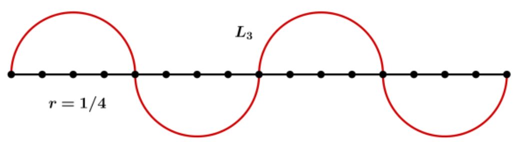
2. *Construye dos medias circunferencias de radio 1/2. Calcula la longitud. (Es igual a una circunferencia de radio 1/2).*

$$L_2 = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$



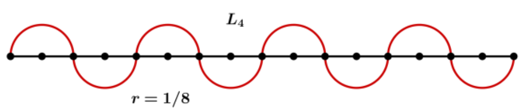
3. *Construye cuatro medias circunferencias de radio 1/4. Calcula la longitud. (Es igual a dos circunferencias de radio 1/4).*

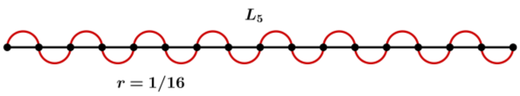
$$L_3 = 2 \cdot 2\pi r = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi$$



4. *Construye ocho medias circunferencias de radio 1/8. Calcula la longitud. (Es igual a cuatro circunferencias de radio 1/8).*

$$L_4 = 4 \cdot 2\pi r = 4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{8} = \pi$$



5. *Construye dieciséis medias circunferencias de radio 1/16. Calcula la longitud. (Es igual a ocho circunferencias de radio 1/16).* $L_5 = 8 \cdot 2\pi r = 8 \cdot 2\pi \cdot \dfrac{1}{16} = \pi$	

6. *Si continuamos esta construcción de forma indefinida obtenemos una sucesión de líneas curvas que se aproximan al segmento de longitud 2, pero por otra parte, todas tienen longitud constante igual al número π.*

$$L_n = 2^{n-2} \cdot 2\pi r = 2^{n-2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \pi$$

Según esto:

¿Se puede deducir que π=2?

¿Se puede deducir que π es racional?

¿Se puede deducir que π no es trascendente?

¿Se puede deducir que está resuelto el problema de la cuadratura del círculo?

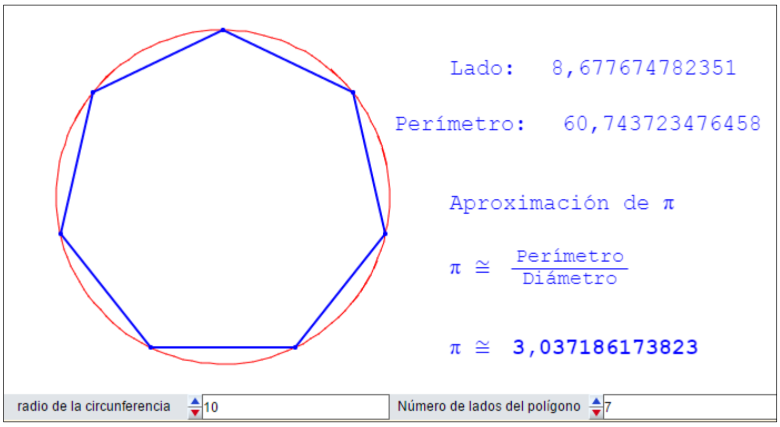
7. El método de Arquímedes con el Proyecto Descartes.

En la Red Educativa digital Descartes, se puede consultar la miscelánea del mismo autor de este documento:

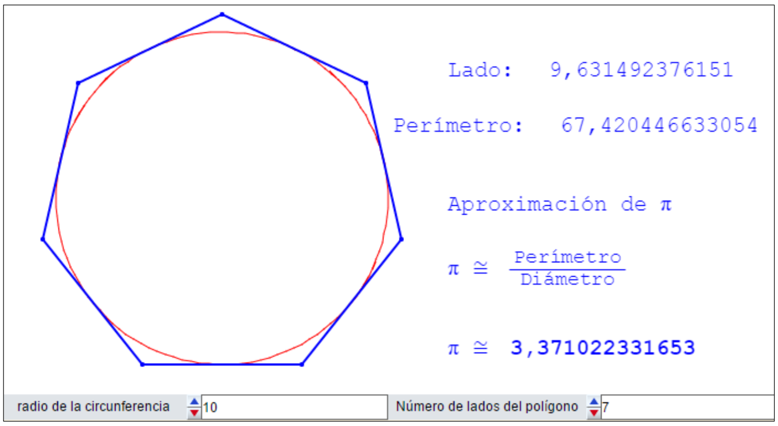
(http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Aproximacion_de_pi-JS/index.html).

En esta miscelánea se puede comprobar de forma interactiva, modificando los parámetros de las pestañas de la barra inferior, como varía el cociente entre el perímetro del polígono regular y el diámetro de la circunferencia, en los polígonos inscritos y circunscritos, por separado o de forma conjunta.

. Utiliza esta actividad para comprobar las aproximaciones con polígonos inscritos.



. Comprueba ahora las aproximaciones con polígonos circunscritos.



. Comprueba ahora con esta escena el valor de las dos aproximaciones a la vez.

Acotación del valor de π con un polígono de 7 lados.

Aproximación por defecto		Aproximación por exceso
3,037186173823	$< \pi <$	3,371022331653

Número de lados del polígono 7

8. El método de Arquímedes y la Trigonometría.

Utilizando las razones trigonométricas se obtienen las siguiente fórmulas para el perímetro de los polígonos y para el cociente entre el perímetro y el diámetro de la circunferencia, siendo "n" el número de lados del polígono y "r" el radio de la circunferencia.

En los polígonos inscritos:

$$\frac{\text{Perímetro}}{\text{Diámetro}} = \frac{n \cdot 2r \cdot \operatorname{sen}\frac{180^{\circ}}{n}}{2r} = n \cdot \operatorname{sen}\frac{180^{\circ}}{n}$$

En los polígonos circunscritos:

$$\frac{\text{Perímetro}}{\text{Diámetro}} = \frac{n \cdot 2r \cdot \operatorname{tg}\frac{180^{\circ}}{n}}{2r} = n \cdot \operatorname{tg}\frac{180^{\circ}}{n}$$

Según lo anterior, sea cuál sea el número de lados "n" de los polígonos inscritos y circunscritos, siempre se verificará que:

$$n \cdot \operatorname{sen}\frac{180^{\circ}}{n} < \pi < n \cdot \operatorname{tg}\frac{180^{\circ}}{n}$$

C *Calcula el valor el valor que se obtiene con estas fórmulas para los polígonos que utilizó Arquímedes, de número de lados: 6, 12, 24, 48 y 96. Hazlo con Geogebra y con la calculadora. Compara los resultados con los obtenidos anteriormente.*

A continuación se muestran los resultados obtenidos con Geogebra. De igual forma se haría con la calculadora.

n = 6	ValorNumérico[6*sen(180° /6),5] → **3**	< π <	ValorNumérico[6*tg(180°/6),5] → **3.4641**
n = 12	ValorNumérico[12*sen(180° /12),5] → **3.1058**	< π <	ValorNumérico[12*tg(180°/12),5] → **3.2154**
n = 24	ValorNumérico[24*sen(180° /24),5] → **3.1326**	< π <	ValorNumérico[24*tg(180°/24),5] → **3.1597**
n = 48	ValorNumérico[48*sen(180° /48),5] → **3.1394**	< π <	ValorNumérico[48*tg(180°/48),5] → **3.1461**
n = 96	ValorNumérico[96*sen(180° /96),11] → **3.1410319509**	< π <	ValorNumérico[96*tg(180°/96),11] → **3.1427145996**

Vamos a utilizar ahora estas fórmulas para comprobar que para polígonos con un número de lados muy grande, la aproximación que se obtiene tiene bastante precisión.

Calcula el valor el valor que se obtiene con estas fórmulas para polígonos con número de lados: 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, ... Comprueba hasta qué número de lados se puede calcular.

$n = 10^3$	ValorNumérico[1000*sen(180° /1000),11] → 3.1415874859	<	**π**	<	ValorNumérico[1000*tg(180°/1000),11] → 3.1416029891
$n = 10^4$	ValorNumérico[10000*sen(180° /10000),11] → 3.1415926019	<	**π**	<	ValorNumérico[10000*tg(180°/10000),11] → 3.1415927569
$n = 10^5$	ValorNumérico[10^5*sen(180° /10^5),11] ≈ 3.1415926531	<	**π**	<	ValorNumérico[10^5*tg(180°/10^5),11] ≈ 3.1415926546
$n = 10^6$	ValorNumérico[10^6*sen(180° /10^6),16] ≈ 3.141592653584625	<	**π**	<	ValorNumérico[10^6*tg(180°/10^6),16] ≈ 3.141592653600129
$n = 10^7$	ValorNumérico[10^7*sen(180° /10^7),16] ≈ 3.141592653589742	<	**π**	<	ValorNumérico[10^7*tg(180°/10^7),16] → 3.141592653589897

. . .

$n = 10^{10}$	ValorNumérico[10^10*sen(180° /10^10),21] → 3.14159265358979323840	<	**π**	<	ValorNumérico[10^10*tg(180°/10^10),21] → 3.14159265358979323856

Compara la aproximación obtenida con las cifras decimales de **π**.

ValorNumérico[π ,21]
→ 3.14159265358979323846

9. Cálculo mental con π.

Sabiendo que la longitud de una circunferencia se calcula con la fórmula: $L= 2\pi r$ y que el área del círculo se obtiene con la fórmula $A=\pi r^2$, realiza mentalmente las siguientes actividades dando el resultado en función del número π:

1. a) Calcula la longitud de la circunferencia cuando $r = 1$ cm.
   b) Calcula el área del círculo cuando $r = 1$ cm.

2. a) Calcula la longitud de la circunferencia cuando $r = \pi$ cm.
   b) Calcula el área del círculo cuando $r = \pi$ cm.

3. a) Calcula la longitud de la circunferencia cuando $r = \pi^2$ cm.
   b) Calcula el área del círculo cuando $r = \pi^2$ cm.

4. a) Calcula la longitud de la circunferencia cuando $r = 1/\pi$ cm.
   b) Calcula el área del círculo cuando $r = 1/\pi$ cm.

5. a) ¿Cuál es el valor de r para que la longitud de la circunferencia sea 1 cm?
   b) ¿Cuál es el valor de r para que el área del círculo sea 1 cm^2?

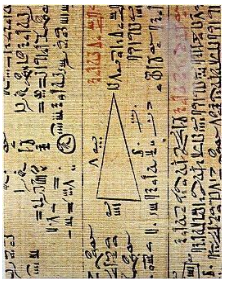
6. a) ¿Cuál es el valor de r para que la longitud de la circunferencia sea π cm?
   b) ¿Cuál es el valor de r para que el área del círculo sea π cm^2?

7. a) ¿Cuál es el valor de r para que la longitud de la circunferencia sea π^2 cm?
   b) ¿Cuál es el valor de r para que el área del círculo sea π^2 cm^2?

8. a) ¿Para qué valor de r coinciden la longitud y el área?
   b) ¿Para qué valor de r la longitud de la circunferencia es el doble del área del círculo?
   c) ¿Para qué valor de r el área del círculo es el doble de la longitud de la circunferencia?

9. a) ¿Cuál debe ser la longitud del lado de un cuadrado para que tenga la misma superficie que una circunferencia de radio r?
   b) ¿Cuál debe ser la longitud del radio de una circunferencia para que tenga la misma superficie que un cuadrado de lado l?

10. Documentos y personajes matemáticos.



Papiro de Ahmes o Papiro de Rhind. Egipto.

Es un papiro egipcio, de 6 m. de longitud y 32 cm. de ancho, escrito por el escriba Ahmes a mediados del siglo XVI a.C., copiado de un documento del siglo XIX a.C.

Contiene 87 problemas sobre cuestiones matemáticas básicas. Entre ellos el problema del círculo descrito del que se puede deducir que se utilizaba una aproximación para π de 3.16.

Tablilla de Susa. Mesopotamia. (Sur de Irán).

Es una tablilla con problemas de Geometría del segundo milenio antes de Cristo, aproximadamente del año 1600 a. C.

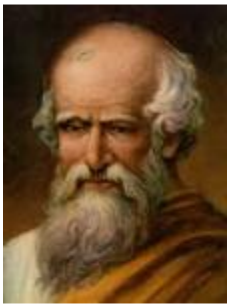
Se utiliza como valor: $\pi = 3 + \frac{1}{8} = 3.125$

Euclides de Alejandría. Matemático y Geómetra griego.

Nació alrededor del año 325 a.C.
Murió alrededor del año 265 a. C.

En su obra Elementos, de trece libros, recopiló casi todos los conocimientos matemáticos de su época. En la proposición II del libro XII, enuncia:

"Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros".



Arquímedes de Siracusa. Físico, Ingeniero, Inventor, Astrónomo y Matemático griego.

Nació en el año 287 a.C. en Siracusa (Sicilia).
Murió en el año 212 a. C. en Siracusa.

Utilizó polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia y dedujo que el valor de π estaba comprendido entre las fracciones $\frac{223}{71}$ y $\frac{22}{7}$.

Claudio Ptolomeo. Astrónomo y Matemático greco-egipcio.

Nació en el año 100 d.C. en Alejandría, Egipto.
Murió en el año 168 d.C. en Alejandría, Egipto.

Utilizó un polígono de 720 lados para obtener como aproximación:

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = \frac{37}{120} = 3.1416666$$

Liu Hui. Matemático chino.

Nació en Zibo, China.
Murió en el año 295 d. C. en China.

Utiliza el método de Arquímedes para llegar a la aproximación 3.14159, utilizando un polígono de 3072 lados.

Zu Chongzhi. Matemático y astrónomo chino.

Nació en el año 429 d.C. en JianKang.
Murió en el año 500 d. C. en China.

Obtuvo la aproximación racional $\frac{355}{113}$, que fue la más precisa durante 900 años y sigue siendo la aproximación racional más exacta de todas las que tienen denominador menor que 16600.

Aryabhata. Matemático y astrónomo indio.

Nació en el 476 d.C. en Patna, India.
Murió en el 550 d.C. en Asaka, India.

En su obra, "Aryabhatiyam", utilizaba como valor de π:

$$3.1416.$$

Brahmagupta. Matemático y astrónomo indio.

Nació en el 598 d.C. en Bhinmal, India.
Murió en el 670 d.C. en India.

Utilizaba como valor de π:

$$\sqrt{10} = 3.16.$$

Abu Abdallah Muḥammad ibn Mūsā al-Jwārizmī. Matemático y astrónomo persa musulmán.

Nació alrededor del 780 d.C. en Jiva, Uzbekistán.
Murió en 850 d. C. en Bagdad, Irak.

En el siglo IX, indica en su obra "Álgebra", que el hombre práctico usa como valor de π, $22/7$, el geómetra utiliza 3 y el astrónomo 3.1416.

Madhava de Sangamagrama. Matemático indio.

Nació en 1350 en Kerala, India.
Murió en 1425 en India.

En el año 1400 utiliza el desarrollo en serie de la arcotangente y suma 21 términos de la serie para calcular 11 cifras decimales. Esta serie la redescubriría doscientos años después Gregory.

Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi. Matemático y astrónomo persa.

Nació en 1380 en Kashan, Irán.
Murió el 22 de junio 1429 en Samarcanda, Uzbekistán.

Obtiene 16 decimales utilizando el método de Arquímedes con polígonos de un elevado número de lados. Es la mayor precisión conseguida hasta ese momento.

François Viète. Matemático francés.

Nació en 1540 en Fontenay le Comte, Francia.
Murió el 13 de diciembre de 1603 en París, Francia.

Calculó 10 decimales exactos de π utilizando un polígono de 393216 lados. En 1593 descubre el primer producto infinito cuyo producto es una expresión de π.

Ludolf Van Ceulen. Matemático alemán.

Nació el 28 de enero de 1540 en Hildesheim, Alemania.
Murió el 31 de diciembre de 1610 en Leiden, Países Bajos.

Hizo una primera aproximación con 20 cifras decimales y después llegó a calcular 35 cifras decimales de π, utilizando el método de Arquímedes y un polígono de 2^{62} lados. Dedicó parte de su vida a este trabajo.

William Oughtred. Matemático y astrónomo inglés.

Nació el 5 de marzo de 1574 en Eton, Reino Unido.
Murió el 30 de junio de 1660 en Albury, Reino Unido.

Fue el primero en utilizar la letra griega π como símbolo del número pi, como inicial de pheriferia (perímetro). Aunque lo popularizó más adelante Euler.

Thomas Hobbes. Filósofo inglés. También se dedicó a la Geometría.

Nació el 5 de abril de 1588 en Westport, Reino Unido.
Murió el 4 de diciembre de 1679 en Derbyshire, Reino Unido.

Intentó resolver el problema de la cuadratura del círculo y obtuvo alguna aproximación geométrica para π, pero cometió errores.

John Wallis. Matemático inglés.

Nació el 23 de noviembre de 1616 en Ashford, Reino Unido.
Murió el 28 de octubre de 1703 en Oxford, Reino Unido.

En 1665 obtiene las cien primeras cifras decimales de π con el producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}\times\frac{8\times 8}{7\times 9}\times\ldots = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$$

Adam Adamandy Kochanski. Matemático polaco.

Nació el 5 de agosto de 1631 en Dobrzyń nad Wisłą, Polonia.
Murió el 17 de mayo de 1700 en Teplice, República Checa.

Se dedicó a intentar resolver la cuadratura del círculo. Para ello realizó algunas aproximaciones geométricas al número π, obteniendo:

$$\pi = \sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}} = 3.141533$$

Gottfried Wilhelm Leibniz. Matemático alemán.

Nació el 1 de julio de 1646 en Leipzig, Alemania.
Murió el 14 de noviembre de 1716 en Hannover, Alemania.

En 1674, obtiene a partir del desarrollo en serie de arctg x, para x=1:

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

John Machin. Profesor de astronomía inglés.

Nació en 1680 en Reino Unido.
Murió el 9 de junio de 1751 en Londres, Reino Unido.

En 1706 consigue 100 cifres decimales, calculadas a mano, con la fórmula:

$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\frac{1}{239}$$

William Jones. Matemático galés.

Nació en 1675.
Murió el 3 de julio de 1749 en Londres, Reino Unido.

Propuso utilizar la letra griega π como símbolo del número pi. Antes la había utilizado William Oughtred. Después lo popularizó Euler.

Leonhard Paul Euler. Matemático y físico suizo.

Nació el 15 de abril de 1707 en Basilea, Suiza.
Murió el 18 de septiembre de 1783 en San Petersburgo, Rusia.

Es uno de los grandes matemáticos de la historia. Generalizó el uso de la letra griega π, aunque no fe el primero en utilizarla, en su libro “Introductio in Analysin Infinitorum”. Realizó también algunas aproximaciones al cálculo del número π.

Johan Heinrich Lambert. Matemático, físico, astrónomo y filósofo.

Nació 26 de agosto de 1728, Mulhouse, Francia
Murió 25 de septiembre de 1777, Berlín, Alemania.

Demostró que π es un número irracional usando el desarrollo en fracción continua de la función tangente. Aseguró que π era un número trascendente, pero eso fue demostrado más adelante.

Lorenzo Mascheroni. Matemático italiano.

Nació el 13 de mayo de 1750 en Bérgamo, Italia.
Murió el 14 de julio de 1800 en París, Francia.

Realizó una aproximación geométrica al número π, en la que se obtiene:

$$\pi = \sqrt{1+\sqrt{6}} + \sqrt{9-3\sqrt{6}} = 3.142399$$

Carl Friedrich Gauss. Matemático alemán.

Nació el 30 de abril de 1777 en Brunswick, Alemania.
Murió el 23 de febrero de 1855 en Gotinga, Alemania.

Descubrió algunas fórmulas del tipo arcotangente para aproximar el valor de π:

$$\frac{\pi}{4} = 12\,\text{arctg}\,\frac{1}{18} + 8\,\text{arctg}\,\frac{1}{57} - 5\,\text{arctg}\,\frac{1}{239}$$

William Shanks. Matemático inglés.

Nació el 25 de enero de 1812 en Corsenside, Reino Unido.
Murió en junio de 1882 en Houghton le Spring, Reino Unido.

Dedicó veinte años al cálculo de cifras decimales de π y obtuvo en 1853, 707 decimales, con la fórmula de Machin. Sin embargo, cometió un error en el decimal que ocupaba el lugar 528º y a partir de él, todos los demás estaban mal calculados. Este error fue descubierto en 1944 con una calculadora mecánica.

Carl Louis Ferdinand von Lindemann. Matemático alemán.

Nació el 12 de abril de 1852. en Hannover, Alemania.
Murió el 6 de marzo de 1939 en Múnich, Alemania.

En 1882 demostró que π es un número trascendente. Con esta demostración se probaba también que no era posible resolver la cuadratura del círculo.

Srinivasa Ramanujan. Matemático indio.

Nació el 22 de diciembre de 1887 en Erode, India.
Murió el 26 de abril de 1920 en Kumbakonan, India.

Descubrió la siguiente serie infinita que converge a π:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\cdot(1103+26390n)}{(n!)^4\cdot 396^{4n}}$$

David (1947) y **Gregory** (1952) **Chudnosky**. Matemáticos rusos.

El **algoritmo de Chudnovsky** es un método rápido para calcular los dígitos de π. Fue usado por los hermanos Chudnovsky para calcular más de mil millones de dígitos. Se utilizó también en el cálculo de 2.7 billones de dígitos en diciembre de 2009, 5 billones de dígitos en agosto de 2010, y 10 billones de dígitos en octubre de 2011.

$$\frac{1}{\pi}=12\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(6n)!}{(3n)!\times(n!)^3}\cdot\frac{13591409+545140134n}{(640320)^{3n+\frac{3}{2}}}$$

11. Bibliografía.

Barrios, L. (2004). Tres números con nombre. En Navarro, F.J., Barrios, L. La historia de los sistemas de numeración y de las operaciones (págs. 74-87). Granada.

Gómez, J.M. (2013). El número π. Consultado en febrero de 2017. de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/numpi.htm.

El número π. Consultado en febrero de 2017 de https://es.wikipedia.org/wiki/Número_ π

Barrios, L. (2014). Aproximaciones por defecto y por exceso del número π. Método de Arquímedes. Consultado en febrero de 2017 de: http://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Aproximacion_de_pi-JS/index.html

Además los datos biográficos y las fotografías utilizadas de los personajes matemáticos corresponden a la página de cada personaje de https://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia.